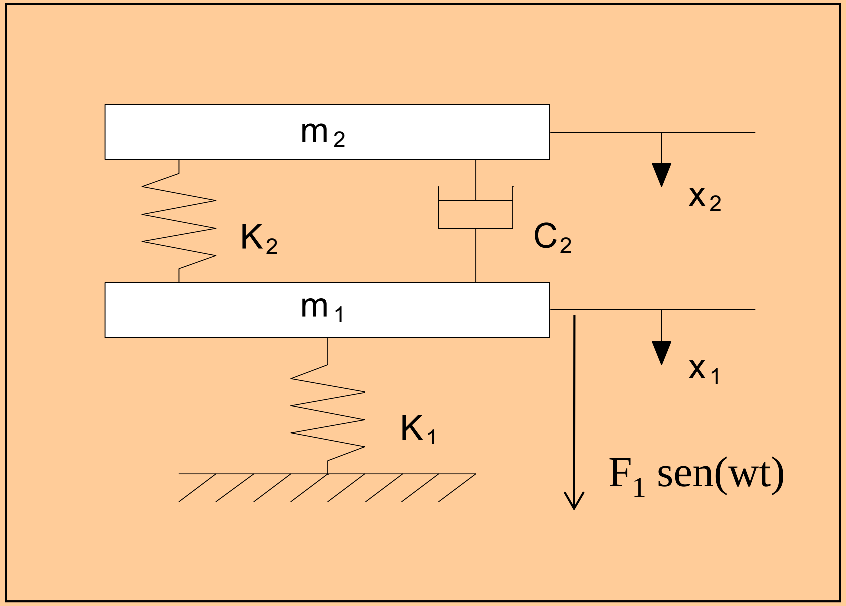
Tema 6

VIBRACIONES EN SISTEMAS MECÁNICOS DE 2 G.D.L.

INDICE

6.2. Formulación del modelo mecánico

Vibración Forzada



$$x_i = X_i \operatorname{sen}(\omega \cdot t)$$
$$\dot{x}_i = X_i \omega \cos(\omega \cdot t)$$
$$\ddot{x}_i = -X_i \omega^2 \operatorname{sen}(\omega \cdot t)$$

$$\begin{cases} -K_1 x_1 - K_2(x_1 - x_2) - C_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + F_1 \operatorname{sen}(\omega \cdot t) = m_1 \ddot{x}_1 \\ -K_2(x_2 - x_1) - C_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

$$\boxed{m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + K_1 x_1 = F_1 \operatorname{sen}(\omega \cdot t)}$$

6.2. Formulación del modelo mecánico

Vibración Forzada

Factor de Amplificación, A:

$$\boxed{A = \frac{X_1}{F_1 / K_1}}$$

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{R}{M} r_1^2\right)^2 + 4\varsigma^2 \frac{R}{M} r_1^2}{\left[(1 - \frac{R}{M} r_1^2)(1 - r_1^2) - \frac{1}{M} r_1^2\right]^2 + 4\varsigma^2 \frac{R}{M} r_1^2 \left[(1 - r_1^2) - \frac{1}{M} r_1^2\right]^2}}}$$

$M = m_1 / m_2$

$R = K_1 / K_2$

$r_1 = \omega / \omega_{n1}$

6.2. Formulación del modelo mecánico

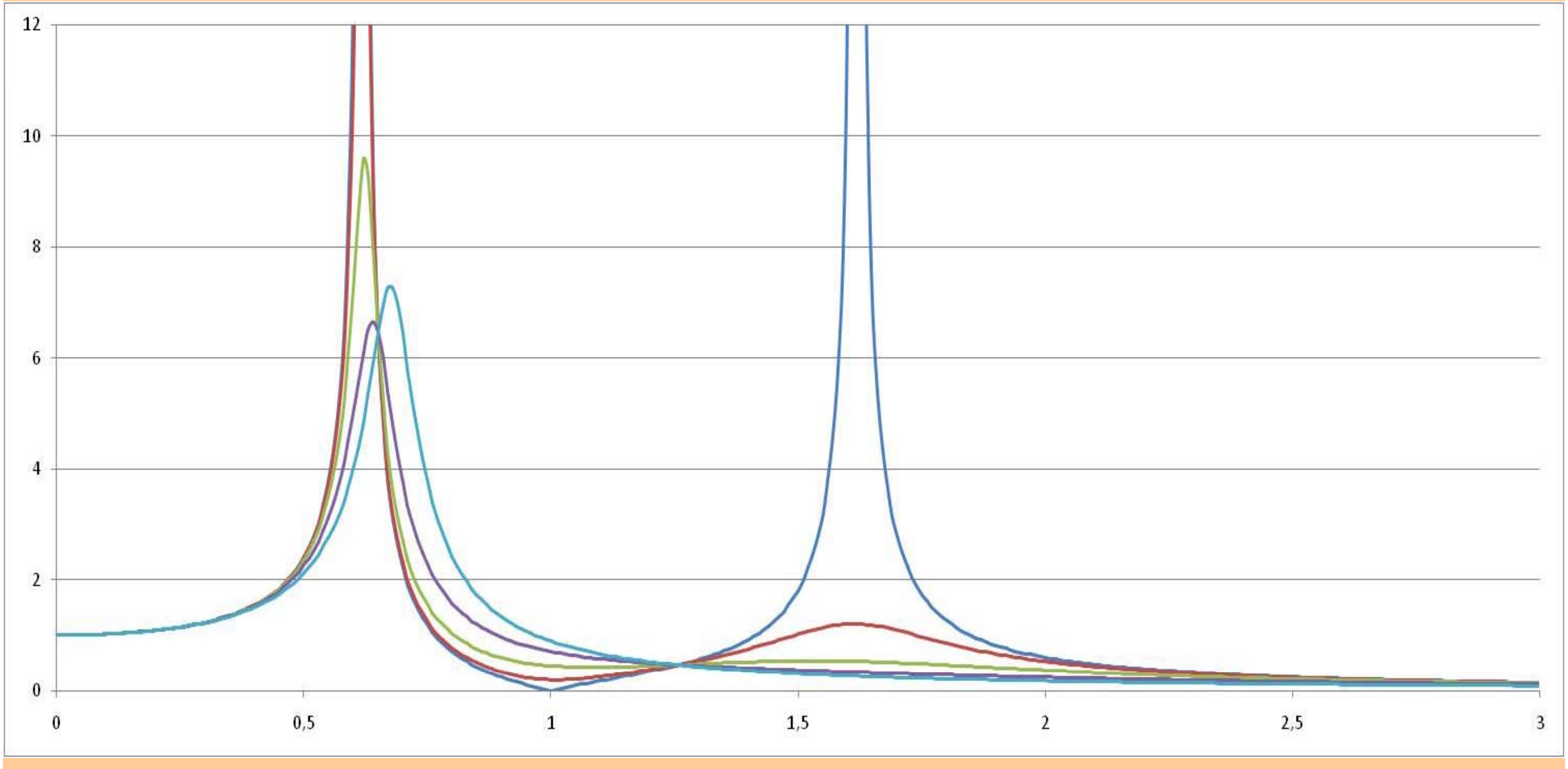
Vibración Forzada

Factor de Amplificación, A:

$$\boxed{A = \frac{X_1}{F_1 / K_1}}$$

$M = m_1 / m_2 = 1$

$R = K_1 / K_2 = 1$



6.2. Formulación del modelo mecánico

Vibración Forzada

Factor de Amplificación, A: $$\boxed{A = \frac{X_1}{F_1 / K_1}}$$

$M = m_1 / m_2 = 1$

$R = K_1 / K_2 = 1$

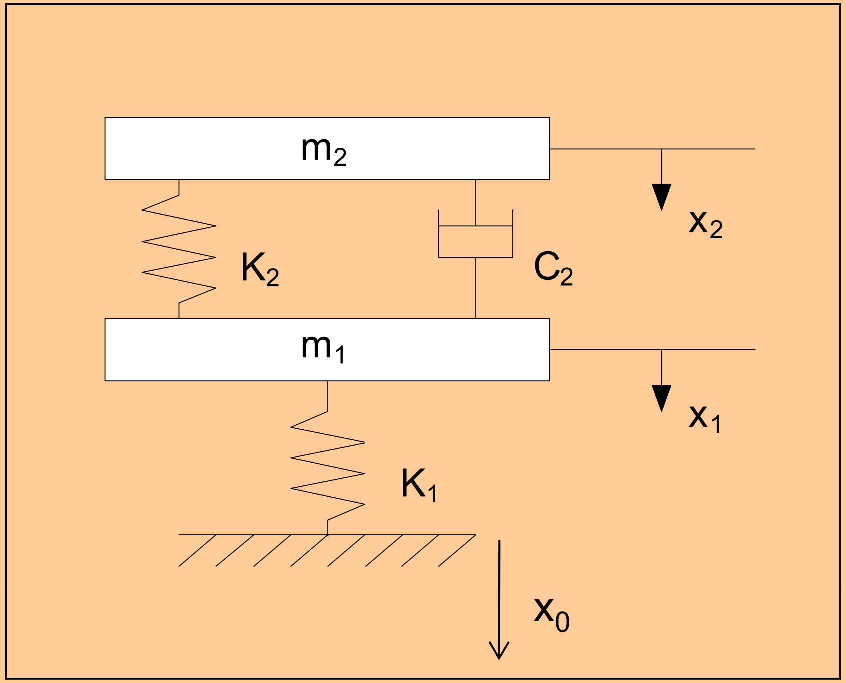
Puntos de corte de todas las curvas:

$r_1 = 0$	$A = 1$
$r_1 = 0{,}65$	$A = 6{,}48$
$r_1 = 1{,}26$	$A = 0{,}47$
$r_1 =$ œ	$A = 0$

Resonancia: $r_1' = 0{,}618049$ $r_1'' = 1{,}618034$

6.2. Formulación del modelo mecánico

Vibración Forzada



$$x_0 = X_0 \operatorname{sen}(wt)$$

$$x_1 = X_1 \operatorname{sen}(w_1\, t)$$

$$x_2 = X_2 \operatorname{sen}(w_2\, t)$$

Función de Transmisibilidad

$$\boxed{T.R._1 = \frac{X_1}{X_0}}$$

$$\boxed{T.R._2 = \frac{X_2}{X_0}}$$

6.2. Formulación del modelo mecánico

Vibración Forzada

Función de Transmisibilidad

$$T.R._2 = \frac{X_2}{X_0} = \sqrt{\frac{1+4\varsigma^2 r_2^2}{\left[(1-\frac{R}{M}r_2^2)(1-r_2^2)-Rr_2^2\right]^2+4\varsigma^2 r_2^2\left[(1-\frac{R}{M}r_2^2)-Rr_2^2\right]^2}}$$

$M = m_1 / m_2$

$R = K_1 / K_2$

$r_2 = \omega / \omega_{n2}$

6.2. Formulación del modelo mecánico

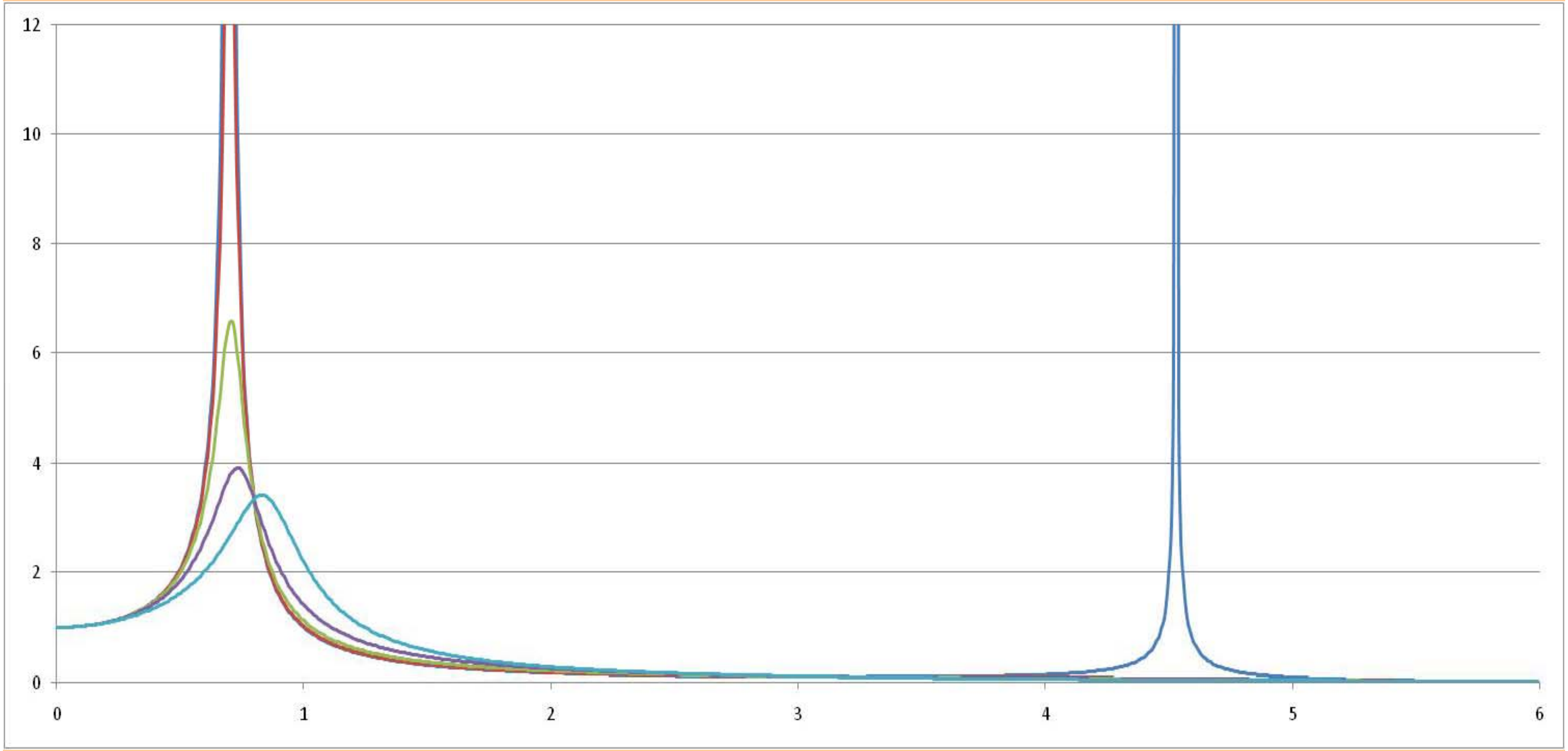
Vibración Forzada

Función de Transmisibilidad

$$T.R._2 = \frac{X_2}{X_0}$$

$M = m_1 / m_2 = 1$

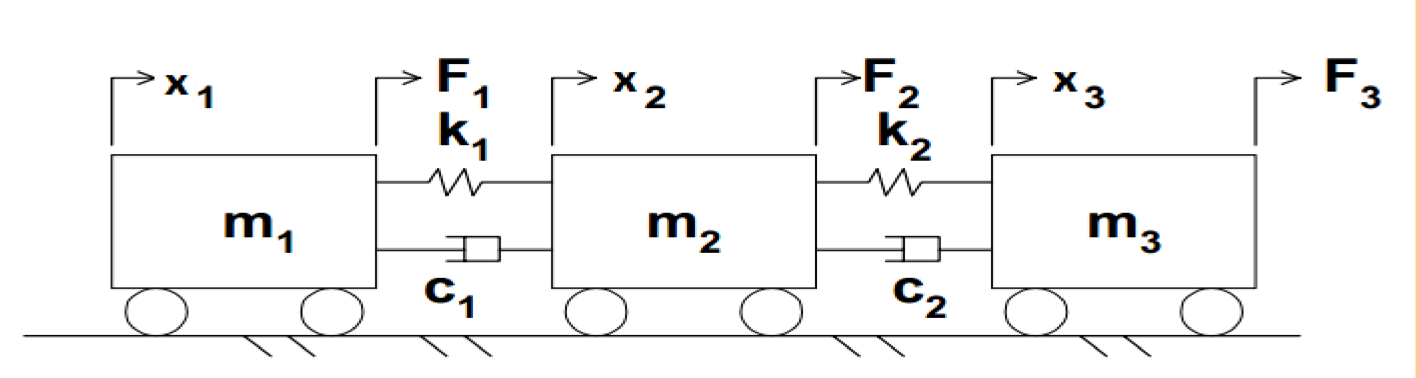
$R = K_1 / K_2 = 10$



6.3. Cálculo de las frecuencias de vibración.

- Método de Rayleigh.
- Método de los coeficientes de influencia.

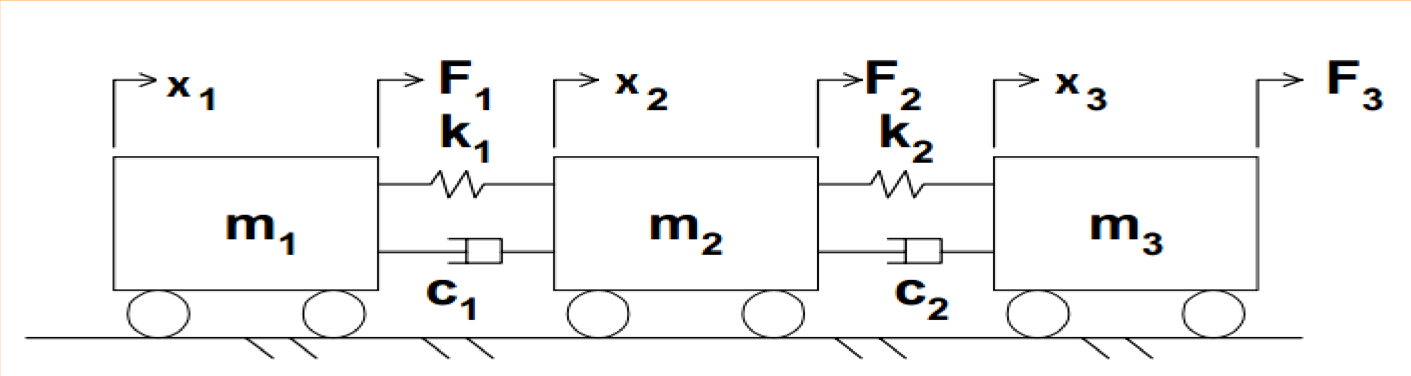
Empleo de las coordenadas generalizadas (Lagrange) en sistemas amortiguados forzados.



$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = 0$$

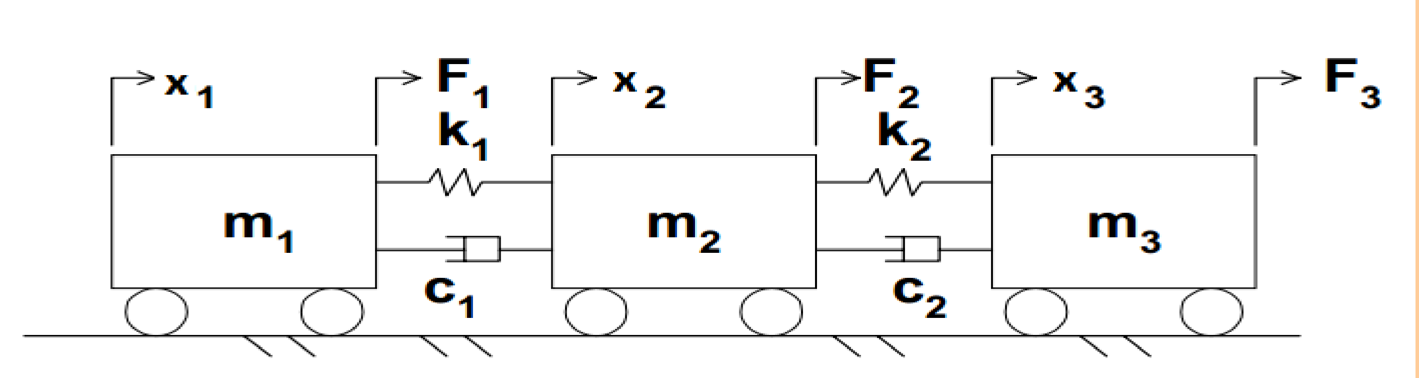
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Coordenadas generalizadas



$z_1 = x_1$	, Posición de la masa 1
$z_2 = dx_1/dt$	, Velocidad de la masa 1
$z_3 = x_2$	, Posición de la masa 2
$z_4 = dx_2/dt$	, Velocidad de la masa 2
$z_5 = x_3$	, Posición de la masa 3
$z_6 = dx_3/dt$	, Velocidad de la masa 3

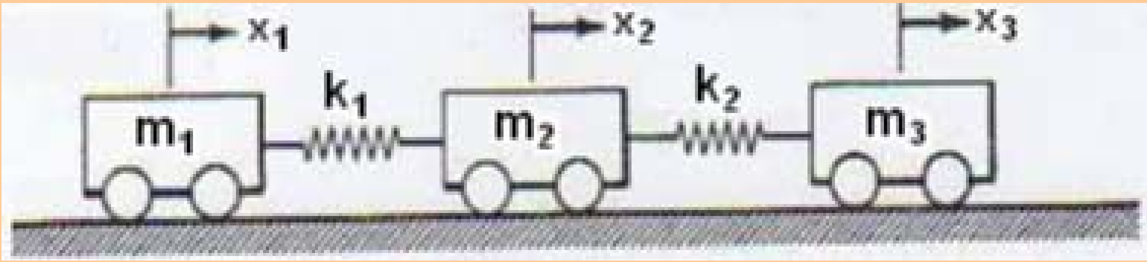
Empleo de las coordenadas generalizadas (Lagrange) en sistemas amortiguados forzados.



$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \end{bmatrix} = + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1}{m_1} & \frac{-c_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{c_1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{c_1}{m_2} & \frac{-(k_1+k_2)}{m_2} & \frac{-(c_1+c_2)}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{k_2}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} & \frac{-c_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F_1}{m_1} \\ 0 \\ \frac{F_2}{m_2} \\ 0 \\ \frac{F_3}{m_3} \end{bmatrix}$$

6.4. Cálculo de los modos de vibración.

Ecuaciones de movimiento.



$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

6.4. Cálculo de los modos de vibración.

Definición de los modos principales de vibración.

$$x_i = X_i sen(w_i t + \phi_i)$$

Donde:

x_i , es el vector de desplazamientos para todos los grados de libertad a la “i-ésima” frecuencia de resonancia.

X_i , es el autovector, modo de víbración, para la “i-ésima” frecuencia de resonancia.

w_i , “i-ésima” frecuencia de resonancia, x_i , “i-ésimo” autovalor.

ϕ_i , ángulo de fase inicial del “i-ésimo” grado de libertad, (arbitrario).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} sen(w_i t + \phi_i)$$

Análisis Modal

Matriz modal.

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

$$-\omega_i^2 M X_i sen(\omega_i t - \phi_i) + K X_i sen(\omega_i t - \phi_i) = 0$$

$$\left[-\omega_i^2 M + K\right] X_i sen(\omega_i t - \phi_i) = 0$$

$$\boxed{\left[-\omega_i^2 M + K\right] X_i = 0}$$

Es posible la solución trivial X_i=0, pero esta solución no tiene interés, (no hay vibración). Para $X_i \neq 0$, el determinante de la matriz principal, ***"ecuación característica"***, debe ser nulo:

$$\boxed{\left| K - \omega_i^2 M \right| = 0}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} k_1 - \omega_i^2 m_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) - \omega_i^2 m_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 - \omega_i^2 m_3 \end{vmatrix} = 0}$$

Resolviendo, se obtienen las "n" raíces, auto-valores, o frecuencias naturales o de resonancia del sistema.

Análisis Modal

Matriz modal, X.

$$\left[-\omega_i^2 M + K\right] X_i = 0$$

$$K X_i = \omega_i^2 M X_i$$

$$\boxed{\frac{K}{M} X = \omega^2 X}$$

Ortogonalidad de los modos de vibración:

Para un sistema discreto de “n “ masas se expresa:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i^j X_i^k = 0}$$

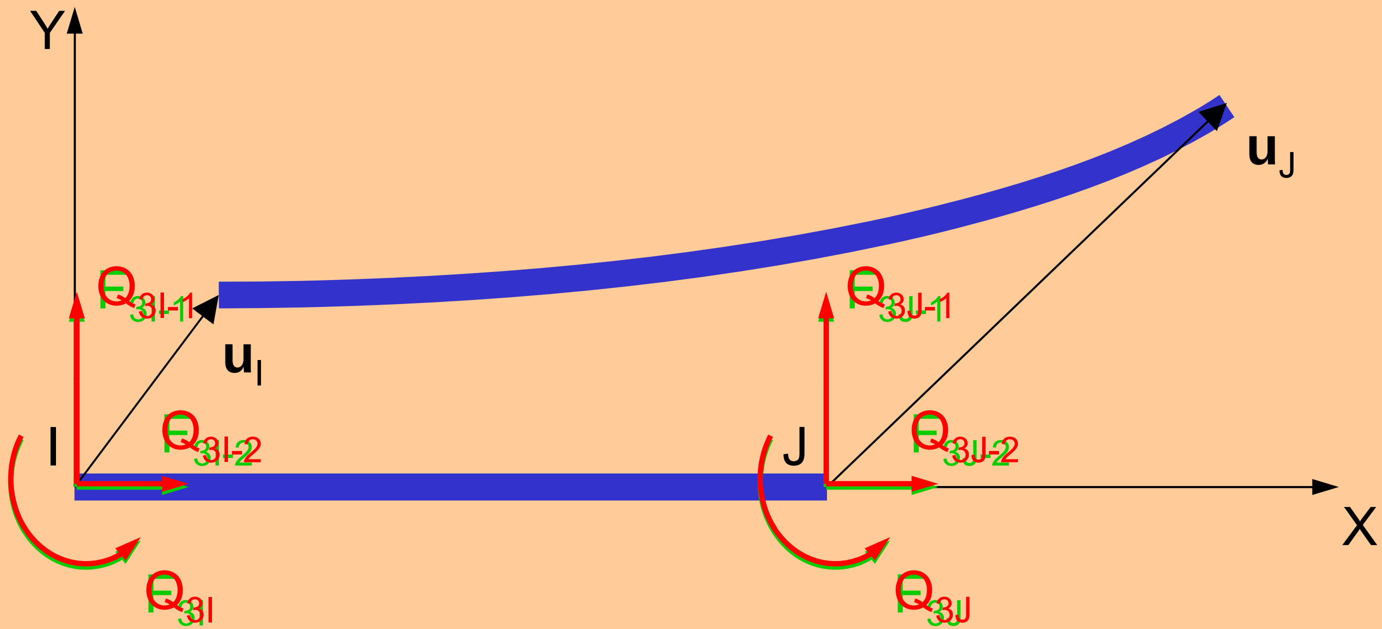
6.5. Análisis modal aplicando la técnica de elementos finitos

$$\boxed{\frac{K}{M} X = \omega^2 X}$$

K, matriz de rigidez
M, matriz de masa

6.5. Análisis modal aplicando la técnica de elementos finitos

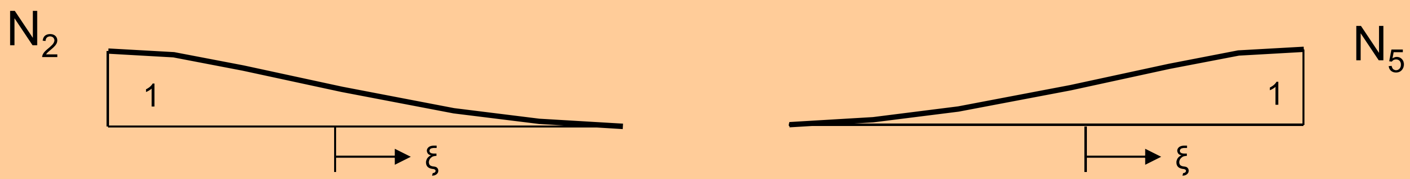
K, matriz de rigidez para una barra biempotrada en el plano (Elemento bidimensional completo)



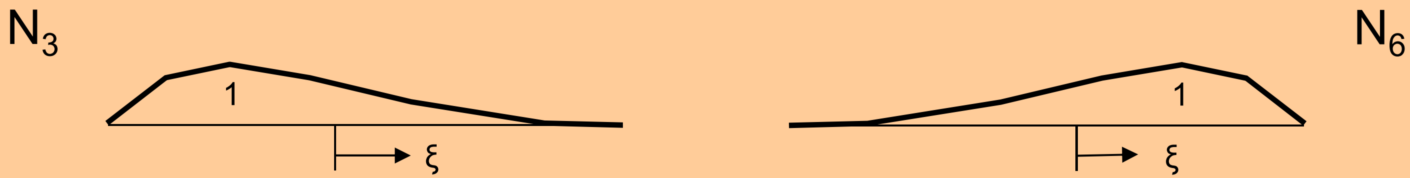
Funciones de forma en el elemento bidimensional completo (Funciones de Hermite)

Tracción

Cortadura



Flexión



$$\boxed{q = q_1N_1 + q_2N_2 + q_3N_3 + q_4N_4 + q_5N_5 + q_6N_6}$$

PROBLEMA UNIDIMENSIONAL

Matriz de rigidez del elemento bidimensional completo

$$U_e = \frac{1}{2} q^T k_e q$$

$$k'_e = \begin{bmatrix} \frac{A_e E_e}{l_e} & 0 & 0 & -\frac{A_e E_e}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 E_e I_e}{l_e^3} & \frac{6 E_e I_e}{l_e^2} & 0 & -\frac{12 E_e I_e}{l_e^3} & \frac{6 E_e I_e}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6 E_e I_e}{l_e^2} & \frac{4 E_e I_e}{l_e} & 0 & -\frac{6 E_e I_e}{l_e^2} & \frac{2 E_e I_e}{l_e} \\ -\frac{A_e E_e}{l_e} & 0 & 0 & \frac{A_e E_e}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 E_e I_e}{l_e^3} & -\frac{6 E_e I_e}{l_e^2} & 0 & \frac{12 E_e I_e}{l_e^3} & -\frac{6 E_e I_e}{l_e^2} \\ 0 & \frac{6 E_e I_e}{l_e^2} & \frac{2 E_e I_e}{l_e} & 0 & -\frac{6 E_e I_e}{l_e^2} & \frac{4 E_e I_e}{l_e} \end{bmatrix}$$

6.5. Análisis modal aplicando la técnica de elementos finitos

M, matriz de masa para una barra biempotrada

(La masa se considera concentrada en el centro de gravedad)

m_e es la masa del elemento, I_{Ge} es el momento de inercia central del elemento, A_e es el área transversal y I_{Ze} es el momento de inercia a flexión de la sección transversal del elemento.

$$
k'_e = \begin{bmatrix}
\frac{m_e}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{m_e}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{I_{Ge}}{2} + \frac{m_e I_{Ze}}{2A_e} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{m_e}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{m_e}{2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{I_{Ge}}{2} + \frac{m_e I_{Ze}}{2A_e}
\end{bmatrix}
$$